

Rattrapage

Partie I

I. Questions de cours

Quand dit-on qu'une **suite de fonctions** u_n définie sur un intervalle I converge uniformément vers une limite u ? **2 pt**

Définition 3 (Convergence uniforme) CM2 p16

Soient $D \subset \mathbb{K}$ et (f_n) une suite de fonctions définie sur D et à valeurs dans \mathbb{K} .

- (f_n) converge **simplement** sur D , si pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente dans \mathbb{K} . On appelle

$$f : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{K}, \\ x \longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{cases} \quad \text{la limite simple de la suite } (f_n) \text{ sur } D$$

- Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur D vers la fonction f . On dit que (f_n) converge **uniformément** sur D vers f si
 - la quantité $u_n = \sup_{x \in D} (|f_n(x) - f(x)|) \in \mathbb{R}$ est finie, au sens où la fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ est majorée par une réelle $M_n < \infty$, pour tout n assez grand.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Alors, soit (u_n) une suite de fonctions qui converge simplement sur I vers la fonction u . On dit que (u_n) converge **uniformément** sur D vers u si

- la quantité $\sup_{x \in I} (|u_n(x) - u(x)|) \in \mathbb{R}$ est finie (au sens où la fonction $x \mapsto |u_n(x) - u(x)|$ est majorée par une réelle $M_n < \infty$, pour tout n assez grand)
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} (|u_n(x) - u(x)|) = 0$.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ est-ce que la **série** $\sum_{n \geq 1} 1/n^a$ converge ?

1 pt

La série converge pour tout $a > 1$, c.à.d. pour $a \in]1, \infty[$.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ est-ce que la **série** $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge ?

1 pt

La série converge pour tout $a \in]-1, 1[$.

II. Exercice 1

On rappelle que la transformée de Fourier de f est donnée par

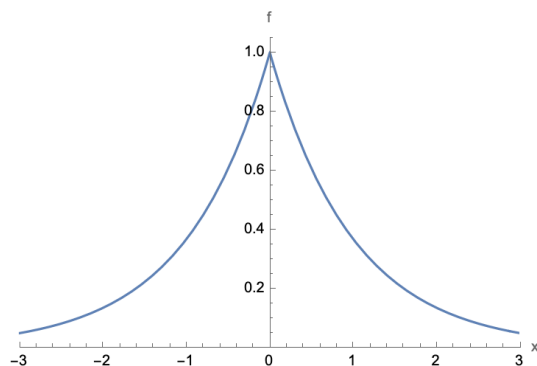
3 pt

$$\widehat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

Dessinez les graphes, puis calculez la transformée de Fourier des fonctions suivantes.

$$f(x) = e^{-|x|}$$

La graphe de la fonction est



On calcule

$$\begin{aligned} \widehat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx-|x|} dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-ipx+x} dx + \int_0^{\infty} e^{-ipx-x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1-ip)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+ip)} dx \end{aligned} \quad (1)$$

Notez, $\nexists p \in \mathbb{R}$ tels que $1 - ip = 0$ ou $1 + ip = 0$, donc on peut directement calculer

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1-ip)} dx = \left[\frac{e^{x(1-ip)}}{1-ip} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{1-ip}, \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} e^{-x(1+ip)} dx = \left[-\frac{e^{-x(1+ip)}}{1+ip} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+ip}, \quad (2)$$

tels que

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{1-ip} + \frac{1}{1+ip} = \frac{1+ip+1-ip}{(1+ip)(1-ip)} = \frac{2}{1+p^2}. \quad (3)$$

On rappelle que la transformée de Fourier de f est donnée par

3 pt

$$\widehat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

Dessinez les graphes, puis calculez la transformée de Fourier des fonctions suivantes.

$$f(x) = \max(0, x) e^{-x}$$

Une autre façon pour écrire la fonction est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

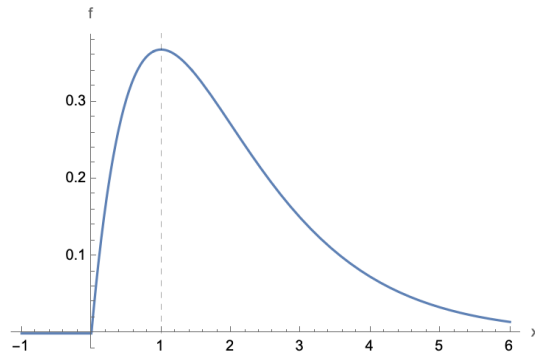
Pour tracer la graphe, on peut calculer

$$f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad (4)$$

de plus on a

$$\forall x > 0 : \quad \frac{df}{dx}(x) = e^{-x}(1-x), \quad \frac{d^2f}{dx^2}(x) = e^{-x}(x-2) \quad (5)$$

Donc f a une maximum en $x = 1$ et un point d'inflexion en $x = 2$. La graphe est donc



Pour la TF on calcule donc On calcule

$$\widehat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} f(x) dx = \int_0^{\infty} x e^{-ipx-x} dx = \int_0^{\infty} x e^{-x(1+ip)} dx \quad (6)$$

Avec $e^{-x(1+ip)} = -\frac{d}{dx} \frac{e^{-x(1+ip)}}{1+ip}$ on peut faire une intégration par partie

$$\widehat{f}(p) = -\frac{1}{1+ip} \int_0^{\infty} x \frac{d}{dx} (e^{-x(1+ip)}) dx = -\frac{1}{1+ip} [x e^{-x(1+ip)}]_0^{\infty} + \frac{1}{1+ip} \int_0^{\infty} e^{-x(1+ip)} dx$$

Le premier terme est zéro et l'intégrale restante est la même que (2), tels que

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{(1+ip)^2}. \quad (7)$$